

TECHNISCHER BERICHT

2. Übungsprogramm: Sphärische Geometrie

1. AUFGABENSTELLUNG:	3
2. LÖSUNGSWEG:	4
2.1 Skizze:	4
2.2 Umrechnung der sphärischen Distanzen in Winkel:.....	5
2.3 Berechnung aller fehlerfreien sphärischen Distanzen und Winkel:.....	5
2.3.1 2. Hauptaufgabe von $P1 \Rightarrow P2$:.....	6
2.3.2 2. Hauptaufgabe von $P2 \Rightarrow P3$:.....	6
2.3.3 2. Hauptaufgabe von $P1 \Rightarrow P3$:.....	7
2.4 Weg A: Herleitung einer Beobachtung durch 2 andere:	7
2.4.1 Herleitung von $a1n$ aus $s1n, s2n$:	7
2.4.2 Herleitung von $s1n$ aus $a1n, a3n$:	8
2.4.3 Herleitung von $s1n$ aus $s2n, a3n$:	9
2.4.4 Herleitung von $a1n$ aus $s2n, a3n$:.....	11
2.5 Weg B: Berechnung von N aus jeweils 2 Beobachtungen:	12
2.5.1 Berechnung von N aus $s1n, a1n$:	12
2.5.2 Berechnung von N aus $s1n, s2n$:.....	13
2.5.3 Berechnung von N aus $a1n, a3n$:.....	13
2.5.4 Berechnung von N aus $s1n, a3n$:	13
2.5.5 Berechnung von N aus $s2n, a3n$:	14
2.5.6 Berechnung von N aus $s2n, a1n$:	14
2.5.7 Gegenüberstellung der Ergebnisse:.....	14
2.6 Mittelwert der geographischen Koordinaten in N:	15
3. ERGEBNIS:	15

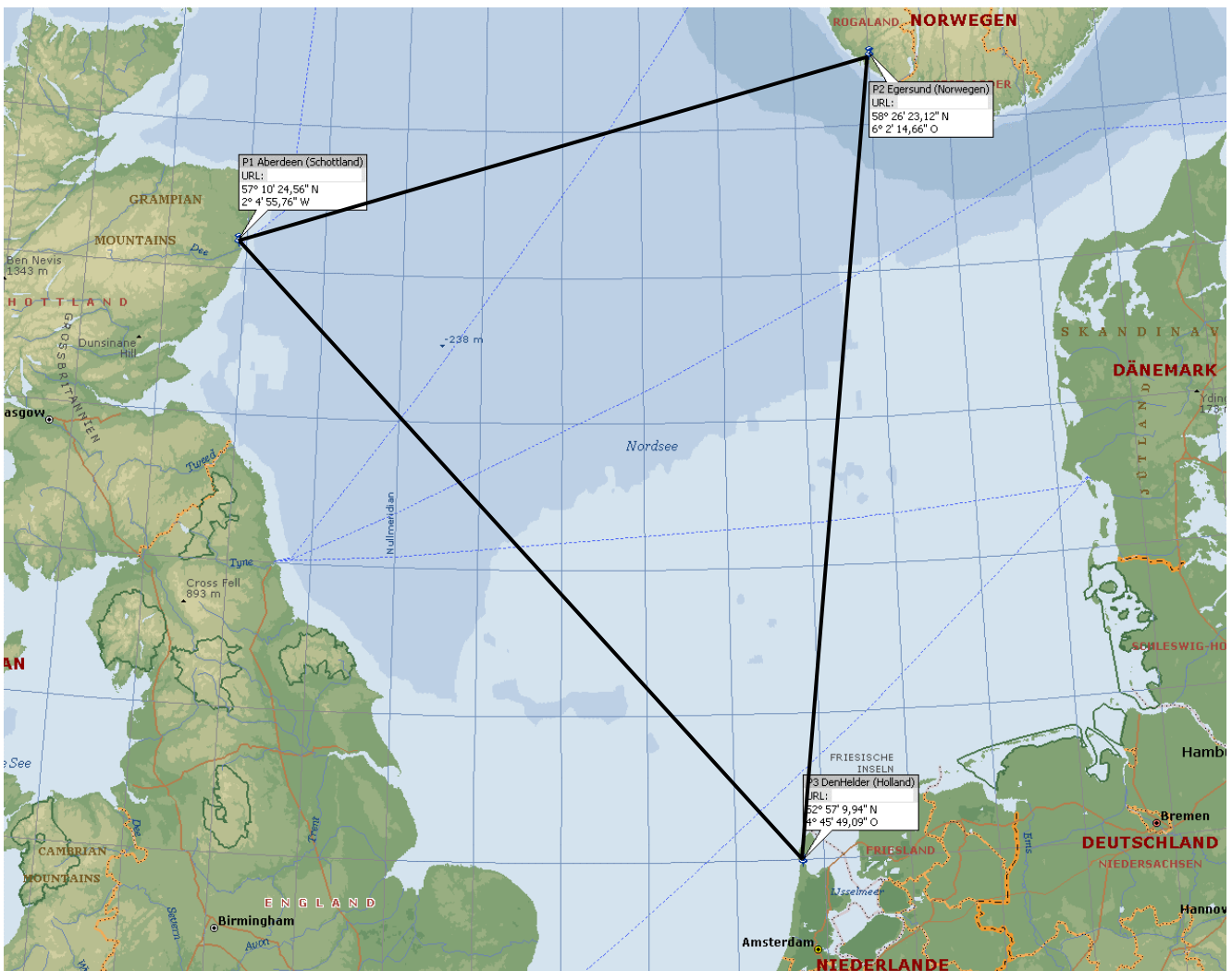
Graz, am 03.09.2004

1. Aufgabenstellung:

Aus globalen Vermessungen wurden sphärische Distanzen s in [m] und Azimute in $[\text{°} \text{ ' } \text{''}]$ von drei Festpunkten in der Nähe von Aberdeen/Schottland, Egersund/Norwegen bzw. DenHelder/Holland zu einer Bohrinsel in der Nordsee (N) abgeleitet. Eine der Beobachtungen stellt sich in Relation zu den anderen als grob falsch heraus.

Nach rechnerischer Feststellung und Ausscheiden der falschen Beobachtung sind die geographischen Koordinaten der Bohrinsel in $[\text{°} \text{ ' } \text{''}]$ durch Einschneideverfahren in allen noch gültigen Kombinationen und einer anschließenden Mittelbildung zu bestimmen.

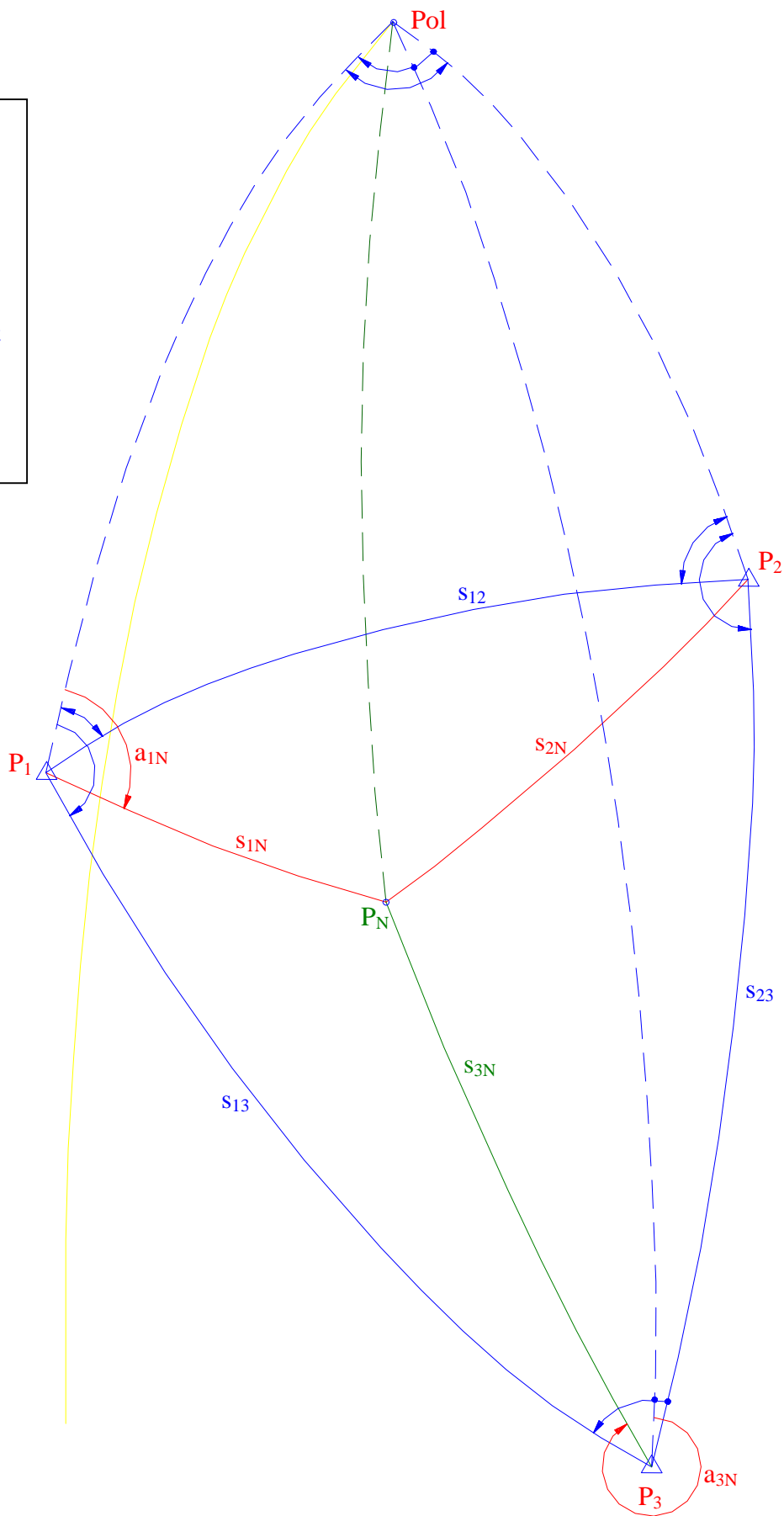
Weitere Angaben können dem Angabeblatt (*prog3_ang.dat*) entnommen werden.



2. Lösungsweg:

2.1 Skizze:

- Legende:
- **gegeben**
 - **berechnet, möglicherweise fehlerbehaftet**
 - **berechnet, nicht fehlerbehaftet**
 - **Nullmeridian**



2.2 Umrechnung der sphärischen Distanzen in Winkel:

Da in der sphärischen Geometrie Distanzen vorzugsweise in Winkleinheiten, nicht in Längeneinheiten angegeben werden, müssen zuerst die gegebenen Distanzen von [m] in Winkleinheiten [$^{\circ}$ ′ ″] umgerechnet werden. Dies erfolgt über den Zusammenhang des zentriwinkels mit der Bogenlänge.

$$b = R \cdot \varphi^{[rad]} \rightarrow \varphi^{[^{\circ}]} = \frac{b}{R} \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$s_{1N}^{[^{\circ}]} = \frac{s_{1N}^{[m]}}{R^{[m]}} \cdot \frac{180}{\pi} = 2,72730^{\circ}$$

$$s_{2N}^{[^{\circ}]} = \frac{s_{2N}^{[m]}}{R^{[m]}} \cdot \frac{180}{\pi} = 2,78793^{\circ}$$

2.3 Berechnung aller fehlerfreien sphärischen Distanzen und Winkel:

Wie man auf der Skizze sehen kann, gibt es folgende 3 Poldreiecke welche nicht in Abhängigkeit einer möglicherweise fehlerhaften Beobachtung stehen.

- Poldreieck P1, Pol, P2
- Poldreieck P1, Pol, P3
- Poldreieck P3, Pol, P2

Deshalb können alle Winkel und sphärischen Distanzen in diesen Dreiecken mit Sicherheit berechnet werden.

Der Einfachheit halber wird auf Formelapparate wie dem sphärischen Cosinussatz nur einmal verwiesen.

- Sphärischer Sinussatz für Seiten¹ \Rightarrow SSS
- Sphärischer Sinussatz für Winkel² \Rightarrow WSS
- Sphärischer Cosinussatz für Seiten³ \Rightarrow SCS
- Sphärischer Cosinussatz für Winkel⁴ \Rightarrow WCS
- Halbseitensatz⁵ \Rightarrow HSS
- Halbwinkelsatz⁶ \Rightarrow HWS
- Hilfsformel⁷ \Rightarrow HLF

Für alle Berechnungen wurden – falls vorhanden – die numerisch stabilen Formeln verwendet.

¹ Siehe Skriptum S. 32

² Siehe Skriptum S. 32

³ Siehe Skriptum S. 32

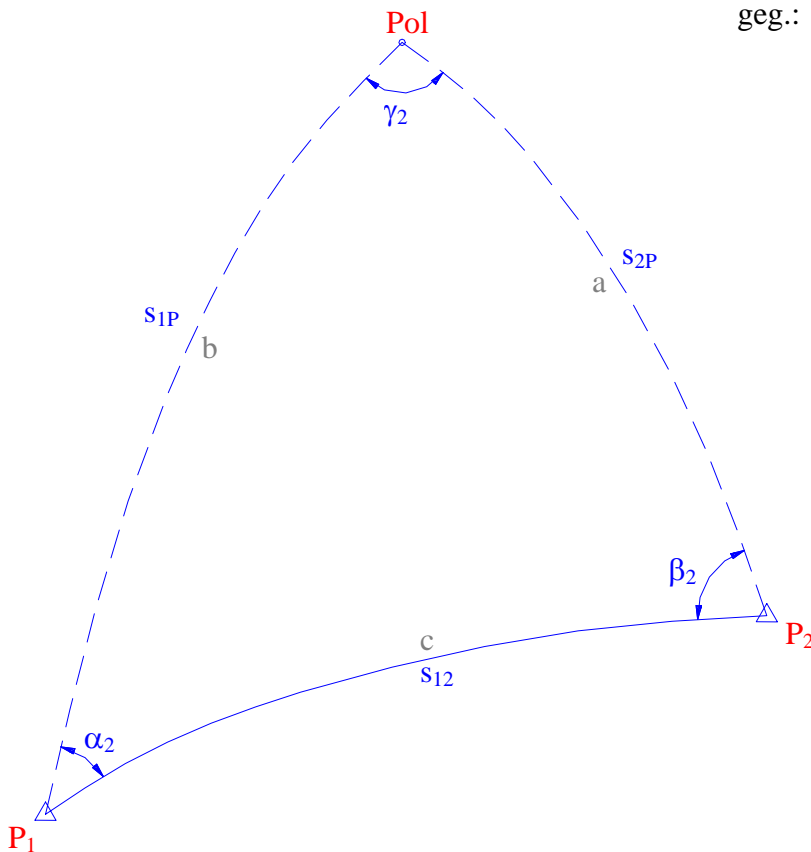
⁴ Siehe Skriptum S. 32

⁵ Siehe Skriptum S. 32

⁶ Siehe Skriptum S. 33

⁷ Siehe Skriptum S. 33

2.3.1 2. Hauptaufgabe von P1 ⇒ P2:



geg.:	s_{2P}	ges.:	s_{12}
	s_{1P}		α_2
	$P_1(\varphi, \lambda)$		β_2
	$P_2(\varphi, \lambda)$		γ_2
	$Pol(\varphi, \lambda)$		

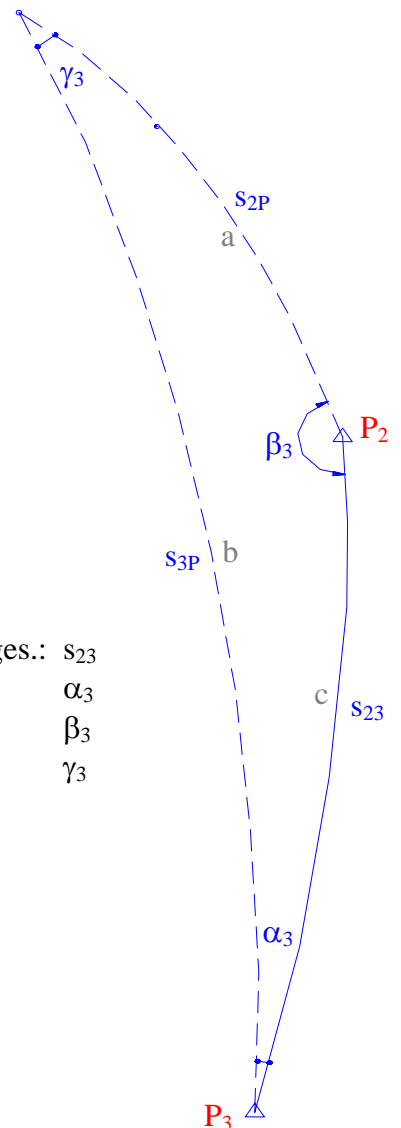
$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \lambda_2 - \lambda_1 = 8,11956^\circ \\ s_{1P} &= 90 - \varphi_1 = 32,82651^\circ \\ s_{2P} &= 90 - \varphi_2 = 31,56024^\circ \\ SCS &\Rightarrow s_{12} = 4,50423^\circ \\ HWS &\Rightarrow \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \\ &\rightarrow \alpha_2 = 70,27315^\circ \\ &\rightarrow \beta_2 = 102,85195^\circ \\ &\rightarrow \gamma_2 = 8,11956^\circ \\ a_{12} &= \alpha_2 \\ a_{21} &= 360^\circ - \beta_2 \\ \gamma_2 &\equiv \lambda_2 - \lambda_1 \checkmark \end{aligned}$$

Das es sich um ein Poldreieck handelt kann aus der Differenz von λ_2 und λ_1 der Polwinkel γ_2 berechnet werden. Anschließend sind 3 Bestimmungsstücke vorhanden um einen Seitencosinussatz durchzuführen und damit s_{12} zu berechnen. Aus einem Halbwinkelsatz können dann alle Winkel im Dreieck bestimmt werden und γ_2 kontrolliert werden.

2.3.2 2. Hauptaufgabe von P2 ⇒ P3:

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \lambda_2 - \lambda_3 = 1,27377^\circ \\ s_{2P} &= 90 - \varphi_2 = 31,56024^\circ \\ s_{3P} &= 90 - \varphi_3 = 37,04724^\circ \\ SCS &\Rightarrow s_{23} = 5,53349^\circ \\ HWS &\Rightarrow \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \\ &\rightarrow \alpha_3 = 6,93015^\circ \\ &\rightarrow \beta_3 = 172,01641^\circ \\ &\rightarrow \gamma_3 = 1,27377^\circ \\ a_{23} &= 360^\circ - \beta_3 \\ a_{32} &= \alpha_3 \\ \gamma_3 &\equiv \lambda_2 - \lambda_3 \checkmark \end{aligned}$$

geg.:	s_{2P}	ges.:	s_{23}
	s_{3P}		α_3
	$P_2(\varphi, \lambda)$		β_3
	$P_3(\varphi, \lambda)$		γ_3
	$Pol(\varphi, \lambda)$		



2.3.3 2. Hauptaufgabe von P1 ⇒ P3:

geg.: s_{1P} ges.: s_{13}
 s_{3P} α_4
 $P_1 (\varphi, \lambda)$ β_4
 $P_3 (\varphi, \lambda)$ γ_4
 $Pol (\varphi, \lambda)$

$$\gamma_4 = \lambda_3 - \lambda_2 = 6,84579^\circ$$

$$s_{1P} = 90 - \varphi_1 = 32,82651^\circ$$

$$s_{3P} = 90 - \varphi_3 = 37,04724^\circ$$

$$SCS \Rightarrow s_{13} = 5,75518^\circ$$

$$HWS \Rightarrow \alpha_4, \beta_4, \gamma_4$$

$$\rightarrow \alpha_4 = 134,26315^\circ$$

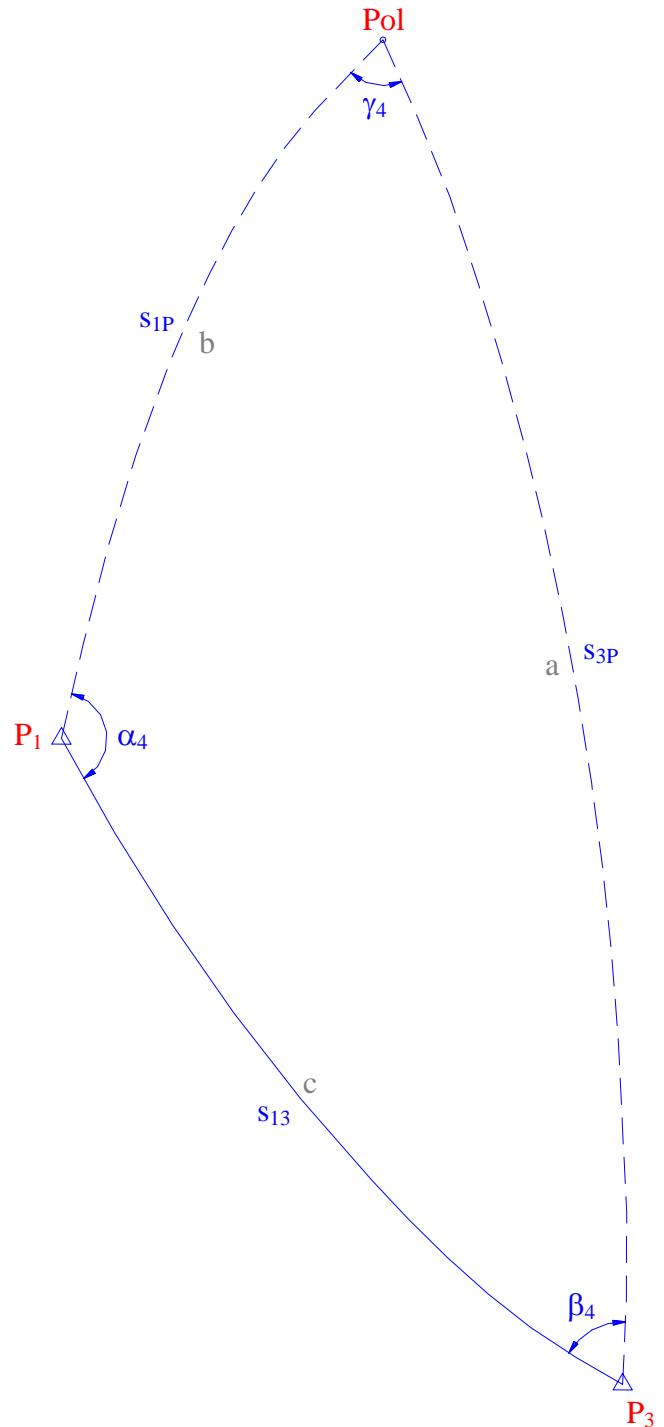
$$\rightarrow \beta_4 = 40,11878^\circ$$

$$\rightarrow \gamma_4 = 6,84579^\circ$$

$$a_{13} = \alpha_4$$

$$a_{31} = 360^\circ - \beta_4$$

$$\gamma_4 \equiv \lambda_3 - \lambda_2 \checkmark$$



2.4 Weg A: Herleitung einer Beobachtung durch 2 andere:

Es wird versucht aus zwei Beobachtungen – wobei eine davon möglicherweise fehlerbehaftet sein kann, eine dritte herzuleiten – welche wiederum fehlerbehaftet sein kann. Durch Vergleichen mit den gegebenen Werten kann die 4. Beobachtung möglicherweise als fehlerbehaftet ausgeschlossen werden.

2.4.1 Herleitung von a_{1n} aus s_{1n}, s_{2n} :

Betrachtet man das sphärische Dreieck P_1, P_2, P_N sieht man dass alle Seiten gegeben sind. Dadurch kann ein Halbwinkelsatz berechnet und damit alle Winkel bestimmt werden.

geg.: s_{1N}
 s_{2N}
 s_{12}
 α_2

ges.: α_1
 β_1
 γ_1

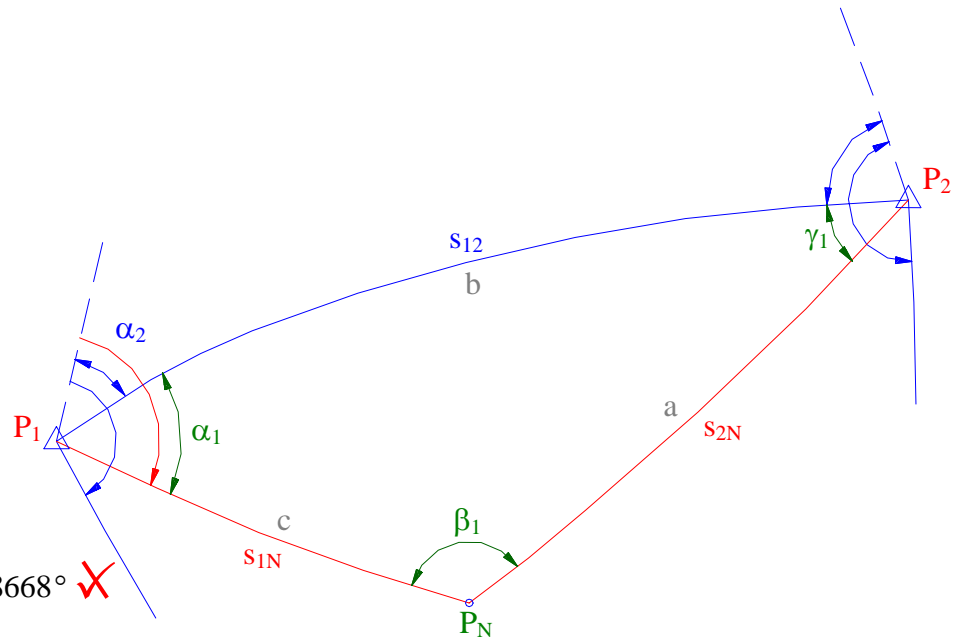
HWS $\Rightarrow \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$

$\rightarrow \alpha_1 = 35,71353^\circ$

$\rightarrow \beta_1 = 109,52566^\circ$

$\rightarrow \gamma_1 = 34,82338$

$a_{1N} \equiv \alpha_1 + \alpha_2 \equiv 105,98668^\circ$ ✗



Die Herleitung von a_{1N} aus s_{1N} und s_{2N} führte zu einer anderen Lösung als der gemessenen Beobachtung. Dies bedeutet dass sowohl die verwendeten Beobachtungen für die Herleitung, s_{1N} und s_{2N} , aber auch die Richtung a_{1N} fehlerhaft sein können. Allerdings muss eine der 3 Beobachtungen fehlerbehaftet sein, deswegen kann man a_{3N} als fehlerbehaftet ausschließen.

$\Rightarrow a_{3N}$ wird als fehlerbehaftet ausgeschlossen!

2.4.2 Herleitung von s_{1n} aus a_{1n}, a_{3n} :

$$\alpha_6 = \alpha_6 - a_{1N} = 28,62608^\circ$$

$$\beta_6 = \beta_4 - (360 - a_{3N}) = 20,71323^\circ$$

$$WCS \Rightarrow \gamma_6 = 130,72523^\circ$$

$$HSS \Rightarrow s_{3N}, s_{1N}, s_{13}$$

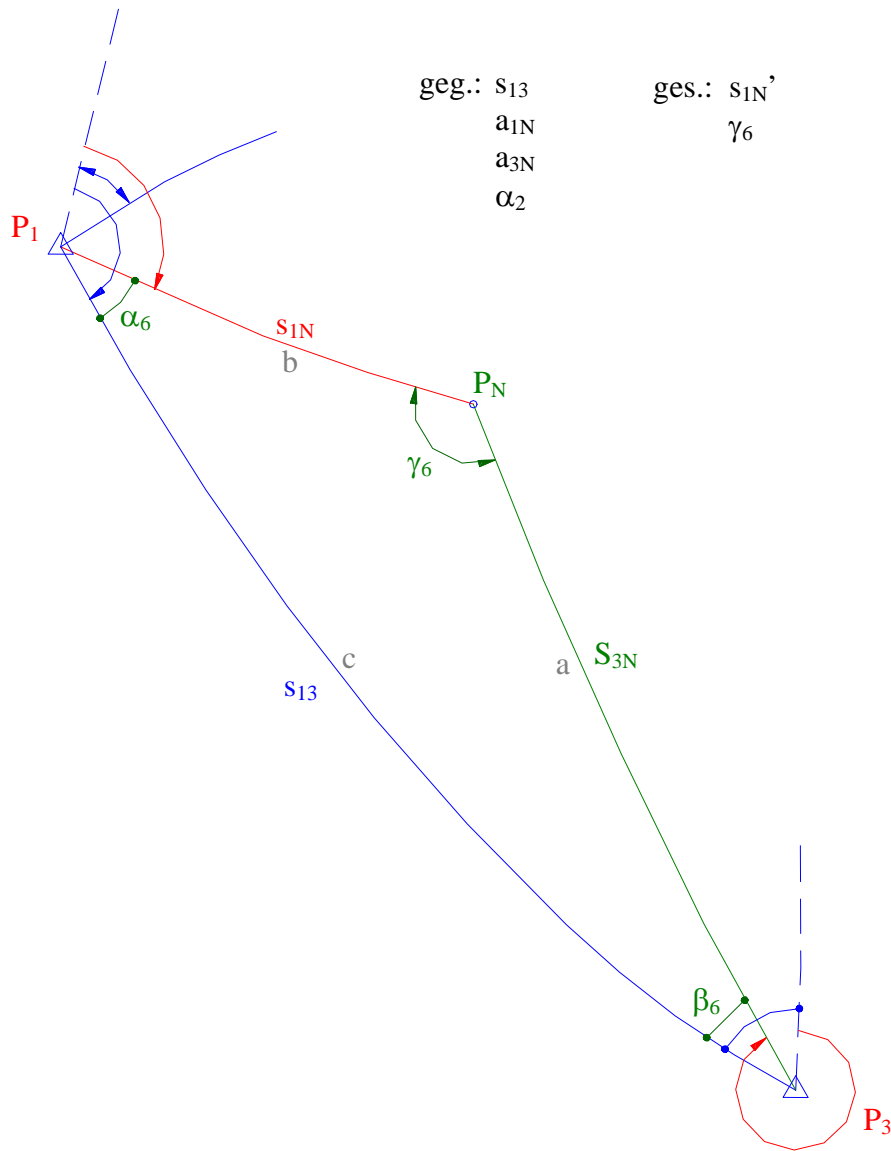
$$\rightarrow s_{3N} = 3,63460^\circ$$

$$\rightarrow s_{1N}' = 2,68244^\circ$$

$$\rightarrow s_{13} = 5,75518^\circ$$
 ✓

$$s_{1N}' \equiv s_{1N} \Rightarrow 2,68244^\circ \equiv 2,72730^\circ$$
 ✗

Es handelt sich in diesem Fall um ein sphärisches Dreieck mit 2 gegebenen Winkeln und eingeschlossener Seite. Die anliegenden Winkel können aus den gegebenen Richtungen ermittelt werden. Anschließend kann durch einen Winkelcosinussatz der 3. Winkel berechnet werden, dies wiederum ermöglicht die Anwendung eines Halbseitensatzes welcher uns alle 3 Distanzen in diesem sphärischen Dreieck liefert.



Allerdings ist die hergeleitete Distanz wieder nicht identisch mit der gemessenen Beobachtung. Dies bedeutet wiederum dass eine der 3 verwendeten Beobachtungen fehlerbehaftet sein muss deshalb kann man nach a_{3N} nun auch s_{2N} als fehlerhaft ausschließen.

⇒ s_{1N} wird als fehlerbehaftet ausgeschlossen!

2.4.3 Herleitung von s_{1n} aus s_{2n} , a_{3n} :

Für diese Herleitung müssen 2 sphärische Dreiecke aufgelöst werden, zuerst gilt es im Dreieck P_3, P_2, P_N alle verbleibenden Winkel zu berechnen. Dies erfolgt durch die Anwendung eines Sinussatzes für Winkel, einer Hilfsformel und eines Halbwinkelsatzes.

$$\alpha_7 = (360 - a_{3N}) + \alpha_3 = 26,33571^\circ$$

$$WSS \Rightarrow \gamma_7^{(1)} = 61,58172^\circ, \gamma_7^{(2)} = 180 - \gamma_7^{(1)} = 118,41828^\circ$$

$$\rightarrow \gamma_7 = \gamma_7^{(2)} = 118,41828^\circ$$

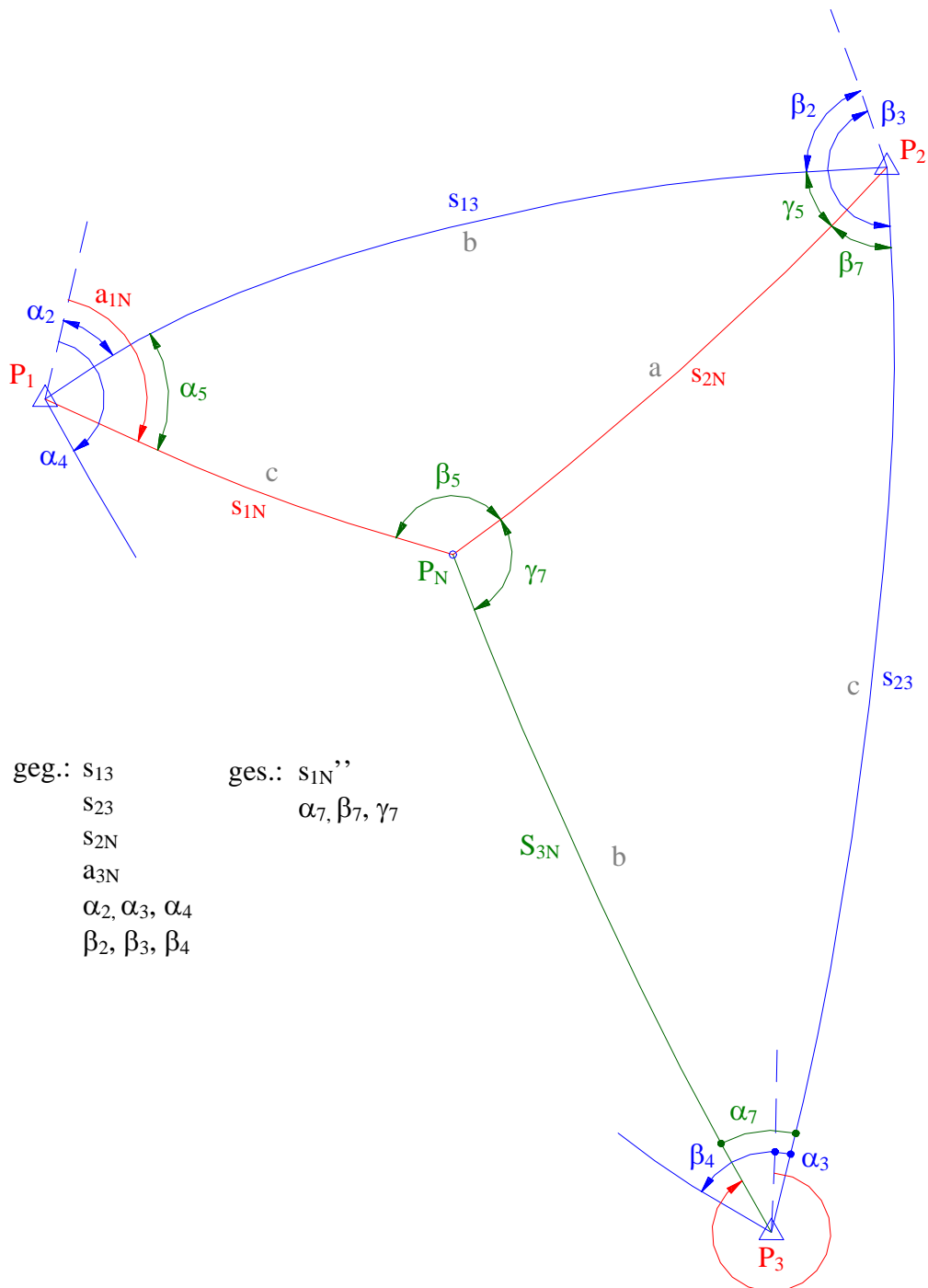
$$HLF \Rightarrow s_{3N}' = 3,63460^\circ$$

$$HWS \Rightarrow \alpha_7, \beta_7, \gamma_7$$

$$\rightarrow \alpha_7 = 26,33571^\circ \checkmark$$

$$\rightarrow \beta_7 = 35,32386^\circ$$

$$\rightarrow \gamma_7 = 118,41828^\circ \checkmark$$



geg.: s_{13}
 s_{23}
 s_{2N}
 a_{3N}
 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$
 $\beta_2, \beta_3, \beta_4$

ges.: s_{1N}''
 $\alpha_7, \beta_7, \gamma_7$

Nun kann der Winkel γ_5 aus den Winkeln β_3 , β_2 und β_7 ermittelt werden. Im sphärischen Dreieck P_1, P_2, P_N sind nun 2 Seiten und ein eingeschlossener Winkel gegeben, die Anwendung eines Seitencosinussatzes liefert die 3. Seite s_{1N}''

$$\gamma_5 = \beta_3 - \beta_7 - \beta_2 = 33,84061^\circ$$

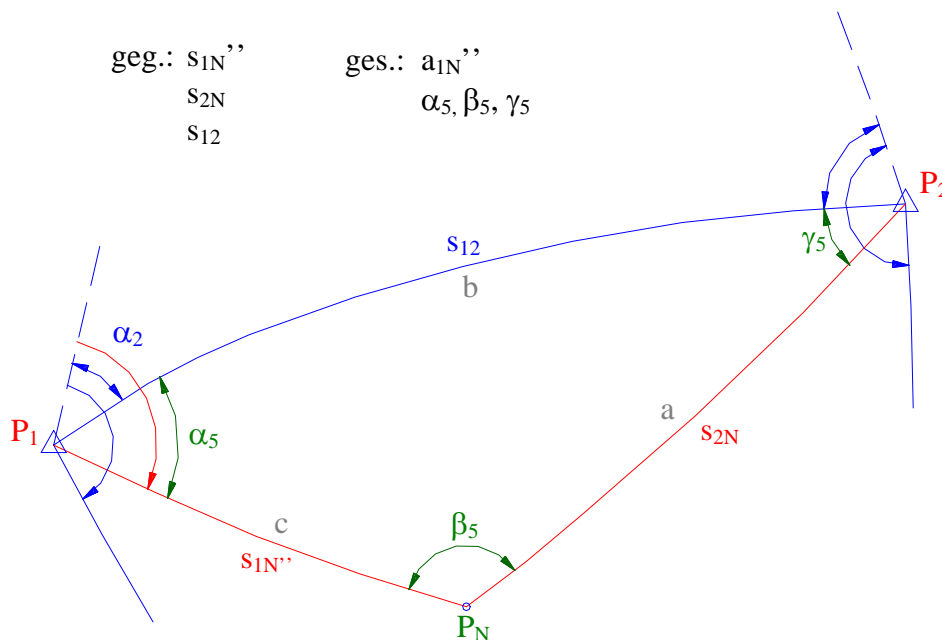
$$SCS \Rightarrow s_{1N}'' = 2,68244^\circ$$

$$s_{1N}'' \equiv s_{1N} \Rightarrow 2,68244^\circ \equiv 2,72730^\circ \quad \times$$

Wiederum stimmt die berechnete Distanz nicht mit der gemessenen Beobachtung zusammen, wenn kein Rechenfehler vorliegt, kann auch a_{1N} als fehlerhaft ausgeschlossen werden. Die fehlerbehaftete Beobachtung müsste deshalb s_{1N} sein. Dies soll nun überprüft werden.

$\Rightarrow s_{1N}$ wird als fehlerbehaftet vermutet!

2.4.4 Herleitung von a_{1N} aus s_{2N} , a_{3N} :



Im sphärischen Dreieck P_1, P_2, P_N wird nun nicht mehr s_{2N} und a_{1N} als bekannt angenommen, sondern s_{1N}'' und s_{2N} . Es sind also alle 3 Seiten bekannt. Mit Hilfe eines Halbwinkelsatzes können alle Winkel ermittelt und a_{1N} überprüft werden.

$$HWS \Rightarrow \alpha_5, \beta_5, \gamma_5$$

$$\rightarrow \alpha_5 = 35,36392^\circ$$

$$\rightarrow \beta_5 = 110,85649^\circ$$

$$\rightarrow \gamma_5 = 33,84061^\circ \quad \checkmark$$

$$a_{1N}'' = \alpha_5 + \alpha_2 = 105,63707^\circ$$

$$a_{1N}'' \equiv a_{1N} \Rightarrow 105,63707^\circ \equiv 105,63707^\circ \quad \checkmark$$

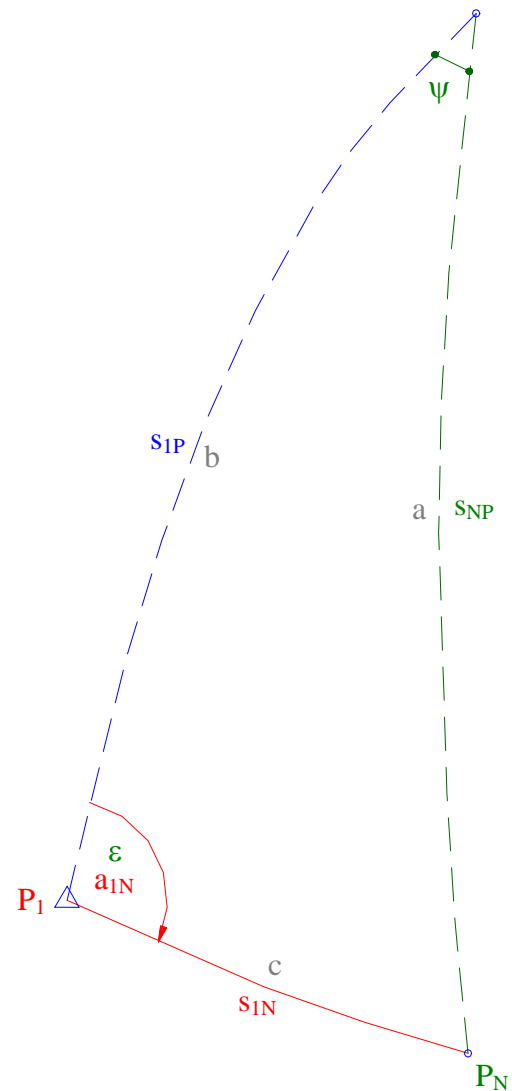
Der Vergleich des errechneten Winkels mit der gemessenen Beobachtung liefert fast exakt den selben Wert, mit einer Abweichung von $1,09612 \cdot 10^{-6}$.

$\Rightarrow s_{1N}$ ist die fehlerbehaftete Beobachtung!

2.5 Weg B: Berechnung von N aus jeweils 2 Beobachtungen:

Ziel ist es jeweils 2 Beobachtungen (von denen eine fehlerbehaftet sein kann) zu verwenden um damit sphärische Koordinaten der Bohrinsel zu berechnen. Bei 4 gemessenen Beobachtungen gibt es 6 verschiedene 2er Kombinationen, davon sind 3 fehlerbehaftet, weil jede Beobachtung 3 mal in einer 2er Kombination vorkommt. Aus den 6 errechneten Koordinatenpaaren kann man erkennen welche Beobachtung zur Verfälschung geführt hat.

Prinzipiell ist jede Berechnung der Koordinaten von P_N eine 1. Hauptaufgabe von einem der Fixpunkte P_1 , P_2 oder P_3 . Dazu benötigt man die sphärischen Distanzen von P_n zum Pol, Dies führt wiederum über den gegenüberliegenden Winkel ε und der sphärischen Distanz zwischen P_n und P_N . Mindestens eine dieser Größen muss berechnet werden. Daraus lässt sich s_{NP} bzw. φ zu berechnen. Sind dann alle Distanzen im Dreieck bekannt, kann durch Anwendung eines Halbwinkelsatzes $\Delta\lambda$ bzw. ψ berechnet werden.



2.5.1 Berechnung von N aus s_{1n} , a_{1n} :

Da das Azimut und die sphärische Distanz von P_1 nach P_N schon gegeben sind, kann man mit einer 1. Hauptaufgabe die Koordinaten von N ermitteln.

$$\varepsilon_1 = a_{1N}$$

$$SCS \Rightarrow s_{NP} = 33,65275^\circ$$

$$\varphi_N^{(1)} = 90^\circ - s_{NP} = 56,34725^\circ$$

$$HWS \Rightarrow \psi_1 = 4,74299^\circ$$

$$\rightarrow \Delta\lambda = \psi_1 \rightarrow \lambda_N^{(1)} = \lambda_1 + \Delta\lambda = 2,66084^\circ$$

2.5.2 Berechnung von N aus $s1n, s2n$:

Im Poldreieck P_2, P_N, Pol kennen wir die Poldistanz von P_2 und die Distanz s_{2N} . Außerdem haben wir unter *Punkt 2.4.1* schon den Winkel γ_1 und unter *Punkt 2.3.1* den Winkel β_2 berechnet, daraus lässt sich ε_2 berechnen. Durch Anwendung eines Seitencosinussatzes kann die Poldistanz von P_N ermittelt – und daraus die Koordinate φ – werden. Nun sind alle Seiten bekannt und mittels eines Halbwinkelsatzes berechnet man ψ_2 und daraus die Koordinate λ .

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \gamma_1 + \beta_2 = 137,67534^\circ \\ SCS &\Rightarrow s_{NP} = 33,66841^\circ \\ \varphi_N^{(2)} &= 90^\circ - s_{NP} = 56,33159^\circ \\ HWS &\Rightarrow \psi_2 = 3,38672^\circ \\ \rightarrow \Delta\lambda &= \psi_2 \rightarrow \lambda_N^{(2)} = \lambda_2 + \Delta\lambda = 2,65068^\circ\end{aligned}$$

2.5.3 Berechnung von N aus $a1n, a3n$:

Man rechnet eine 1. Hauptaufgabe von P_3 nach P_N . Dafür benötigt man ε_3 und s_{3N} . Dies kann durch Auflösung des sphärischen Dreiecks P_1, P_3, P_N ermittelt werden, der Winkel γ_6 wurde schon unter *Punkt 2.4.2* berechnet. Die Hauptaufgabe erfolgt analog zu *Punkt 2.5.1* und *Punkt 2.5.2*.

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 &= 360^\circ - a_{3N} = 19,40556^\circ \\ HSS &\Rightarrow s_{3N} = 3,63460^\circ \\ SCS &\Rightarrow s_{NP} = 33,63772^\circ \\ \varphi_N^{(3)} &= 90^\circ - s_{NP} = 56,36228^\circ \\ HWS &\Rightarrow \psi_3 = 2,17909^\circ \\ \rightarrow \Delta\lambda &= \psi_3 \rightarrow \lambda_N^{(3)} = \lambda_3 - \Delta\lambda = 2,58454^\circ\end{aligned}$$

2.5.4 Berechnung von N aus $s1n, a3n$:

Wiederum rechnet man eine 1. Hauptaufgabe von P_3 nach P_N . Diesmal bedienen wir uns eines Sinussatzes für Winkel und einer Hilfsformel zur Auflösung des sphärischen Dreiecks P_1, P_3, P_N . Die Hauptaufgabe erfolgt analog zu *Punkt 2.5.3*.

$$\begin{aligned}\varepsilon_4 &= 360^\circ - a_{3N} = 19,40556^\circ \\ WSS &\Rightarrow \gamma_6^{(1)} = 48,19259^\circ, \gamma_6^{(2)} = 180 - \gamma_6^{(1)} = 131,80741^\circ \\ \rightarrow \gamma_6' &= \gamma_6^{(2)} = 131,80741^\circ \\ HLF &\Rightarrow s_{3N} = 3,56658^\circ \\ SCS &\Rightarrow s_{NP} = 33,70115^\circ \\ \varphi_N^{(4)} &= 90^\circ - s_{NP} = 56,29885^\circ \\ HWS &\Rightarrow \psi_4 = 2,13480^\circ \\ \rightarrow \Delta\lambda &= \psi_4 \rightarrow \lambda_N^{(4)} = \lambda_3 - \Delta\lambda = 2,62884^\circ\end{aligned}$$

2.5.5 Berechnung von N aus s_{2n} , a_{3n} :

Analog zu *Punkt 2.5.4*, allerdings Auflösung des Dreiecks P_2 , P_3 , P_N .

$$\varepsilon_5 = 360^\circ - a_{3N} = 19,40556^\circ$$

$$WSS \Rightarrow \gamma_7^{(1)} = 61,58172^\circ, \gamma_6^{(2)} = 180 - \gamma_7^{(1)} = 118,41828^\circ$$

$$\rightarrow \gamma_7' = \gamma_7^{(2)} = 118,41828^\circ$$

$$HLF \Rightarrow s_{3N} = 3,63460^\circ$$

$$SCS \Rightarrow s_{NP} = 33,63772^\circ$$

$$\varphi_N^{(5)} = 90^\circ - s_{NP} = 56,36228^\circ$$

$$HWS \Rightarrow \psi_5 = 2,17909^\circ$$

$$\rightarrow \Delta\lambda = \psi_5 \rightarrow \lambda_N^{(5)} = \lambda_3 - \Delta\lambda = 2,58454^\circ$$

2.5.6 Berechnung von N aus s_{2n} , a_{1n} :

Den Winkel α_1' berechnet man aus dem bekannten Azimut a_{1N} und dem Winkel α_2 . Anschließend kann das Dreieck P_1 , P_2 , P_N durch Anwendung eines Winkelsinussatzes, einer Hilfsformel und eines Halbwinkelsatzes komplett aufgelöst werden. Analog zu *Punkt 2.5.2* erfolgt dann die Anwendung der 1. Hauptaufgabe.

$$\alpha_1' = a_{1N} - \alpha_2 = 35,36392^\circ$$

$$WSS \Rightarrow \beta_1^{(1)} = 69,14351^\circ, \beta_1^{(2)} = 180 - \beta_1^{(1)} = 110,85649^\circ$$

$$\rightarrow \beta_1' = \beta_1^{(2)} = 110,85649^\circ$$

$$HLF \Rightarrow s_{1N} = 2,68244^\circ$$

$$HWS \Rightarrow \gamma_1' = 33,84061^\circ$$

$$\varepsilon_6 = \gamma_1' + \beta_2 = 136,69256^\circ$$

$$SCS \Rightarrow s_{NP} = 33,63772^\circ$$

$$\varphi_N^{(6)} = 90^\circ - s_{NP} = 56,36228^\circ$$

$$HWS \Rightarrow \psi_6 = 3,45286^\circ$$

$$\rightarrow \Delta\lambda = \psi_6 \rightarrow \lambda_N^{(6)} = \lambda_2 - \Delta\lambda = 2,58454^\circ$$

2.5.7 Gegenüberstellung der Ergebnisse:

Punkt	Abhängig von	φ (P_N)	λ (P_N)	Status
2.5.1	s_{1N} , a_{1N}	56,3472479673	2,66083687018	fehlerbehaftet
2.5.2	s_{1N} , s_{2N}	56,3315936935	2,65068258552	fehlerbehaftet
2.5.3	a_{1N} , a_{3N}	56,3622777014	2,58454171254	fehlerfrei
2.5.4	s_{1N} , a_{3N}	56,2988484465	2,62883935772	fehlerbehaftet
2.5.5	s_{2N} , a_{3N}	56,3622777645	2,58454166844	fehlerfrei
2.5.6	s_{2N} , a_{1N}	56,3622776711	2,58454186653	fehlerfrei

Aus der Tabelle erkennt man eindeutig dass nur Berechnungen in denen die sphärische Distanz s_{1N} verwendet wurde, unterschiedliche Koordinaten von N ergeben. Alle anderen Berechnungen stimmen bis zur 6. Kommastelle überein. Aus den fehlerfreien Koordinaten (3 Paare) kann nun ein Mittelwert gerechnet werden.

2.6 Mittelwert der geographischen Koordinaten in N:

$$\varphi(P_N) = \frac{\varphi_N^3 + \varphi_N^5 + \varphi_N^6}{3} = \frac{56,3622777014^\circ + 56,3622777645^\circ + 56,3622776711^\circ}{3}$$

$$\rightarrow \varphi(P_N) = 56,3622777123^\circ$$

$$\lambda(P_N) = \frac{\lambda_N^3 + \lambda_N^5 + \lambda_N^6}{3} = \frac{2,58454171254^\circ + 2,58454166844^\circ + 2,58454186653^\circ}{3}$$

$$\rightarrow \lambda(P_N) = 2,58454174917^\circ$$

3. Ergebnis:

Gemittelte geographische Koordinaten des Punktes N:

(gerundet auf die 3. Kommastelle)

$\varphi =$	$56,362^\circ =$	$56^\circ 21' 44,200''$
$\lambda =$	$2,585^\circ =$	$2^\circ 35' 4,350''$