



# TECHNISCHER BERICHT

## 1<sup>st</sup> lab: Gravity and Pressure in the Earth's Interior

<b>1</b>	<b>PROBLEMSTELLUNG .....</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>LÖSUNG UND ERGEBNISSE.....</b>	<b>3</b>
2.1	Berechnung der Massen .....	3
2.2	Berechnung der Schwerebeschleunigung .....	4
2.3	Berechnung des Gravitationspotentials.....	5
2.4	Berechnung der Dichte.....	6

# 1 Problemstellung

Zu berechnen ist die Masse des Erdkerns, des Erdmantels (und Erdkruste) sowie der gesamten Erde.

Außerdem ist die Gravitationsbeschleunigung  $g$  als Funktion des Radius  $r$  vom Geozentrum bis zur Erdoberfläche ( $r = 6370$  km) in einer analytischen Integration zu bestimmen. Durch Einsetzen von numerischen Werten soll die Funktion anschließend geplottet werden.

In einem weiteren Schritt ist die Dichte von Erdkern, sowie von Erdmantel (und Erdkruste) zu berechnen, unter der Annahme einer konstanten Dichte sowohl im Kern als auch im Mantel. Auch die mittlere Dichte der gesamten Erde soll bestimmt werden.

Gegeben ist die eine vereinfachte radiale Dichteverteilung in Abhängigkeit vom Erdradius (siehe Abb. 1) und die entsprechenden numerischen Werte.

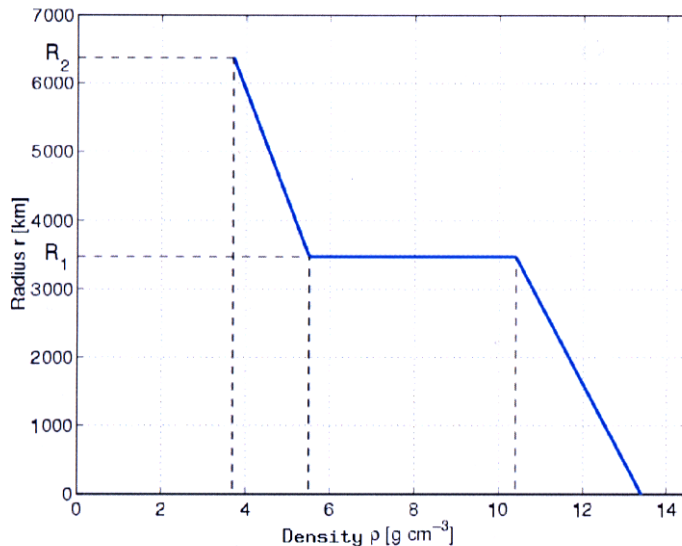


Abb. 1: Dichteverteilung im Erdinneren

$$\rho(0) = 13,4 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

$$\rho(R_1) = 10,4 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \quad 5,5 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

$$\rho(R_2) = 3,7 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

Die Dichte nimmt vom Erdmantel in Richtung Erdmittelpunkt linear zu. Beim Übergang zum Erdkern steigt sie sprunghaft an und steigt dann wieder linear, bis sie ihr Maximum von  $13,4 \text{ kg/dm}^3$  im Erdmittelpunkt erreicht. Der Dichtesprung bei  $R_1$  entsteht dadurch, dass der Erdkern aus Eisen, Nickel, Schwefel, Sauerstoff, Wasserstoff und Kalium besteht. Besonders das Eisen verursacht einen Anstieg der Dichte.

## 2 Lösung und Ergebnisse

### 2.1 Berechnung der Massen

Um die Masse des Erdkerns sowie Erdmantel + Erdkruste berechnen zu können wird eine Funktion benötigt welche die Dichte in Abhängigkeit des Erdradius darstellt. Dies kann mit Hilfe von zwei Geradengleichungen durchgeführt werden:

Allgemeine Geradengleichung:

$$y = k \cdot x + d$$

Dichte in Abhängigkeit von Erdradius für Erdkern:

$$\rho(r) = \rho(0) - \frac{\rho(0) - \rho(R_1)}{R_1} \cdot r = 13,4 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} - \frac{13,4 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} - 10,4 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}}{34.700.000\text{dm}} \cdot r$$

Dichte in Abhängigkeit von Erdradius für Erdmantel + Erdkruste:

$$\rho(r) = d - \frac{\rho(R_1) - \rho(R_2)}{R_2 - R_1} \cdot r$$

$$d = \frac{(\rho(R_1) - \rho(R_2)) \cdot R_2}{R_2 - R_1} + \rho(R_2)$$

$$\rho(r) = \left[ \frac{(\rho(R_1) - \rho(R_2)) \cdot R_2}{R_2 - R_1} + \rho(R_2) \right] - \left[ \frac{\rho(R_1) - \rho(R_2)}{R_2 - R_1} \cdot r \right]$$

$$\rho(r) = \left[ \frac{\left( 5,5 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} - 3,7 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \right) \cdot 63.700.000\text{dm}}{63.700.000\text{dm} - 34.700.000\text{dm}} + 3,7 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \right] - \left[ \frac{5,5 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} - 3,7 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}}{63.700.000\text{dm} - 34.700.000\text{dm}} \cdot r \right]$$

Das Volumen einer Kugel ist integrierte Kugeloberfläche von  $r = 0$  bis  $R$ . Die Kugeloberfläche ist durch folgenden Zusammenhang definiert:

$$O = 4\pi r^2$$

Durch Einsetzen der bekannten Formel für die Masse in Abhängigkeit von Dichte und Volumen

$$m = \rho \cdot V$$

ergibt sich folgendes Integral:

$$m = \int_{r_1}^{r_2} \rho(r) \cdot O(r) \cdot dr$$

Die Ergebnisse der Integration für Erdkern sowie für Erdmantel + Erdkruste können folgender Tabelle entnommen werden:

Objekt	Masse [ $10^{24}$ kg]
Erdkern	1.951
Ermantel + Erdkruste	4.019
Gesamte Erde	5,971

Tab. 1: Ergebnisse Massenberechnung

## 2.2 Berechnung der Schwerebeschleunigung

Die Schwerebeschleunigung kann durch folgenden Zusammenhang beschrieben werden:

$$g = \frac{G \cdot m}{r^2} \quad G \dots \text{Gravitationskonstante } (6,6726 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2})$$

Da die Masse im Erdinnern vom Radius und von der Dichte abhängig ist, muss das Schwerepotential durch Integration bestimmt werden. Dafür wurden von  $r = 0$  bis  $r = R_1$  in 5 [km] Schritten die Potentiale aufintegriert. Erdkern und Erdmantel (+ Erdkruste) wurden dabei getrennt integriert. Die Ergebnisse können dem folgenden Plot entnommen werden:

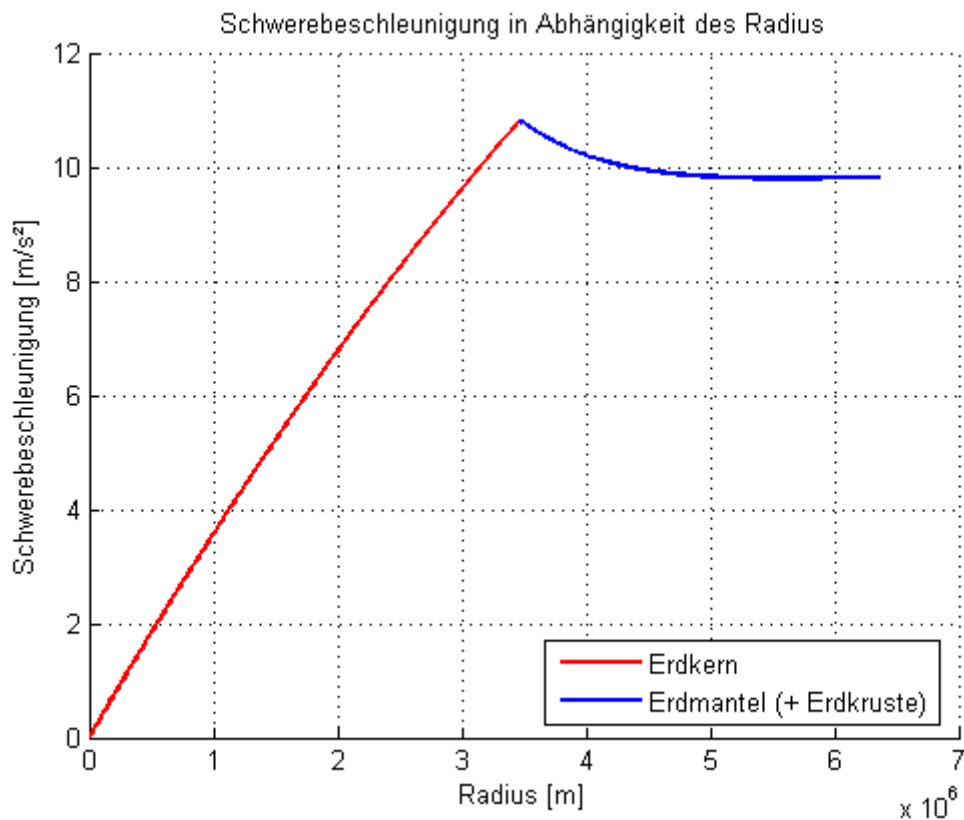


Abb. 2: Schwerebeschleunigung in Abhängigkeit des Radius

Die Schwerebeschleunigung nimmt vom Erdzentrum bis zum Übergang zum Erdmantel zu und erreicht ein Maximum von knapp  $11 \text{ m/s}^2$ , was deutlich über dem Wert an der Erdoberfläche liegt. Das liegt daran, daß die Dichte im Erdkern größer ist, als im Erdmantel, und –kruste. Im Erdmantel + Erdkruste nimmt die Dichte ab, gleichzeitig nimmt die Distanz

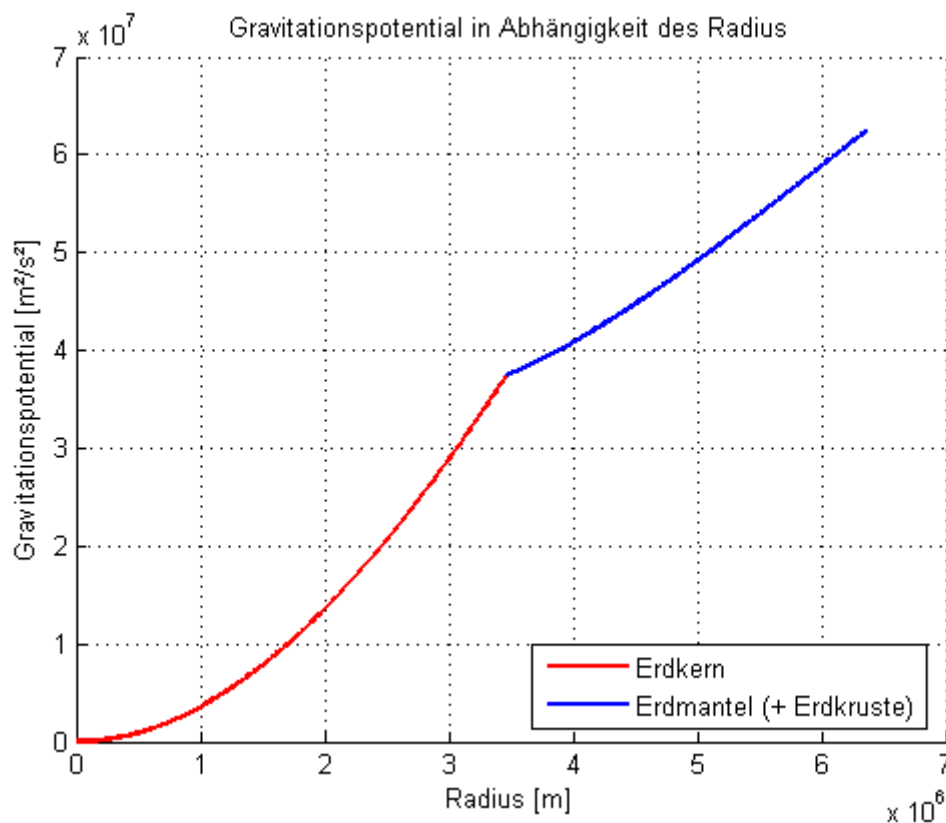
zum Erdkern zu, was dazu führt, dass die Erdschwere in Richtung Erdmantel abnimmt und an der Erdoberfläche  $\sim 9.81 \text{ m/s}^2$  erreicht.

### 2.3 Berechnung des Gravitationspotentials

Das Gravitationspotential kann durch folgenden Zusammenhang beschrieben werden:

$$P = \frac{G \cdot m}{r} \quad G \dots \text{Gravitationskonstante } (6,6726 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2})$$

Ähnlich wie für die Schwerebeschleunigung erfolgte die Berechnung aufgrund der Abhängigkeit der Masse von Dichte und Radius in einer Integration in 5 [km] Schritten und zwar getrennt für Erdkern, bzw. Erdmantel (+ Erdkruste). Die Ergebnisse wurden im folgender Abbildung veranschaulicht:



**Abb. 3: Gravitationspotential in Abhängigkeit des Radius**

Das Gravitationspotential nimmt mit größerem Abstand zum Kern zu (Potentielle Energie). Da die Dichte im Erdkern und somit die Schwerebeschleunigung größer als im Mantel ist ist der rote Teil der Kurve steiler als der blaue Teil (Abb.3).

## 2.4 Berechnung der Dichte

Für die Berechnung der Dichte von Erdkern sowie Erdmantel (+ Erdkruste) wurden folgende Formeln verwendet:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^3$$

Durch Einsetzen der entsprechenden Parameter erhält man folgende Formeln:

$$V_{\text{core}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_1^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3.470.000^3 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{earth}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_2^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6.370.000^3 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{mantle}} = V_{\text{earth}} - V_{\text{core}}$$

$$\rho_{\text{core}} = \frac{m_{\text{core}}}{V_{\text{core}}}$$

$$\rho_{\text{mantle}} = \frac{m_{\text{mantle}}}{V_{\text{mantle}}}$$

Die Ergebnisse wurden in folgender Tabelle veranschaulicht:

Objekt	Dichte [t/m <sup>3</sup> ]
Erdkern	11.15
Erdmantel + Erdkruste	4.43
Gesamte Erde	5.51

**Tab. 2: Ergebnisse Dichteberechnung**