TECHNISCHER BERICHT

2. Übungsprogramm

1. Aufgabenstellung

siehe Anhang

2. Durchführung

2.1 Rechenhilfe

Wie laut Angabeblatt gefordert, wurden sämtliche Rechenschritte „mit der Hand“ durchgeführt. Bei Iterationen wurde auf das Softwarepaket *Matlab 6.5* zurückgegriffen. Als Rechner wurde der *TI89* verwendet. Sämtliche Zwischenergebnisse wurden als Variablen abgespeichert, damit mit der maximal möglichen Anzahl von Dezimalstellen gerechnet werden konnte.

2.2 Näherungshöhen und Aufstellung der A-Matrix

Zuerst wurden mit sämtlichen Messungen Näherungshöhen zu den unbekannten Punkten berechnet. Die Punkte P_1 und P_3 konnten aus 2 Höhenunterschieden berechnet, für die Näherungshöhe reichte der Mittelwert der beiden Messungen. Der Punkt P_2 konnte aus 3 Höhenunterschieden hergeleitet werden. Dabei wurde festgestellt dass sich eine von den 3 Messungen zum Punkt P_2, um ca. 10 cm von den beiden anderen unterschied. Möglicherweise lag hier ein grober Fehler vor. Für die Näherungshöhe des Punktes wurden deswegen nur die 2 anderen Messungen ausgewertet.

Beim Höhenausgleich kann die A-Matrix nur 3 Zustände aufnehmen, -1 wenn der Höhenunterschied zum Punkt negativ ist, 1 für einen postiven Höhenunterschied und 0 wenn kein Höhenunterschied gemessen wurde. Durch die Anzahl der unbekannten Punkte (3) und der Anzahl der Messungen (7) is eine 7*3 Matrix definiert.

2.3 Aufstellung der l-Matrix

Da sich die Neupunkte auf verschiedene Festpunkte beziehen, welche eine unterschiedliche Ausgangshöhe haben, können nicht einfach die gemessenen Höhenunterschiede in die l-Matrix aufgenommen werden. In diesem Fall würden zu große Verbesserungen entstehen welche ungefähr dem Abstand von einer mittleren Ausgangsbasis der Festpunkte entsprechen würden. Stattdessen wird der gemessene Höhenunterschied um einem gerechneten Höhenunterschied aus Näherungshöhen reduziert und in die l-Matrix geschrieben.

2.4 Erste Ausgleichung

Für die Ausgleichung wurde folgender Formelapparat verwendet:

$$\hat{x} = \left(A^T A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot l$$

$$\hat{l} = A \cdot \hat{x}$$

$$v = \hat{l} - l$$

Aus der errechneten v-Matrix konnte nun ein neues Sigma berechnet werden.

2.5 Chi² - Test

Der Chi² - Test musste auf einem Signifikanzniveau von 95% abgelehnt werden. Dies bestätigte die Vermutung des Vorhandenseins eines groben Fehlers in den Messungen.

2.6 Dänische Methode

Die Dänische Methode ist ein Verfahren zur Ausreißersuche. Dabei werden Messungen mit großen Verbesserungen im nächsten Iterationsschritt höher gewichtet als Messungen mit kleinen Verbesserungen. Dabei wird in jedem Iterationsschritt ein neuer gewichteter Ausgleich gerechnet und ein neues s_0 bestimmt. Dies wurde solange durchgeführt bis sich die s_0 zweier aufeinanderfolgenden Iterationsschritte nur mehr um 10^{-5} [mm] oder weniger unterschieden.
In der Gewichtsmatrix P konnte nun der Ausreißer dedektiert werden, dieser hatte das Gewicht 0 erhalten und.

Der Quellcode in Matlab zur Dänischen Methode schaut folgendermaßen aus:

```
% L-Matrix
l=[0.00250; -0.00250; -0.00080; 0.00080; 0.10160; -0.00145; 0.00145]

% A-Matrix
A=[1 0 0; 1 0 0; -1 1 0; 0 1 0; 0 1 0; 0 -1 1; -1 0 1]

% Dänische Methode
s0(1)= 0.04075455802729; % Mit TI89 berechnet

% Iteration 2 und 3
for i=2:3
    for j=1:7
        P(j,j)=(exp(-abs(v(j)/s0(i-1))^4.4))^0.05;
```

```
    end
    xdach=inv(A'*P*A)*A'*P*l;
    ldach=A*xdach;
    v=ldach-l;
    s0(i)=sqrt(v'*P*v/4);
end
i=i+1;
% Alle anderen Iterationen
while (s0(i-2)-s0(i-1)>0.00001)
    for j=1:7
        P(j,j)=(exp(-abs(v(j)/s0(i-1))^3))^0.05;
    end
    xdach=inv(A'*P*A)*A'*P*l;
    ldach=A*xdach;
    v=ldach-l;
    s0(i)=sqrt(v'*P*v/4);
    i=i+1;
end
```

2.7 Erneuter Ausgleich

Bei der fehlerhaften Messung handelte es sich mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit um einen Ziffernsturz oder einen Schreibfehler, deshalb wurde die Messung um 10 cm korrigiert, dieser Wert entsprach der Verbesserung der Messung nach der dänischen Methode.
Nun wurde ein neuer Ausgleich mit verbesserter Messung gerechnet.

2.8 Erneuter Chi² - Test

Der Hypothesenthest wurde nun auf einem Signifikanzniveau von 95% angenommen.

2.9 Optimierung

Der letzte Schritt der Aufgabenstellung bestand in der Optimierung der Netzmessung. Dabei war die Zielfunktion und die Summe der Wiederholungszahlen gegeben, berechnet wurden die Wiederholungszahlen der Messungen und der Genauigkeitsgewinn nach 3 der folgenden Iterationen:

$$\frac{1}{p_j} = \frac{{m_0}^2}{w_j} + \varepsilon^2 \rightarrow P_{jj} = \frac{1}{\frac{{m_0}^2}{w_j} + \varepsilon^2}$$

$$Q = \left(A^T \cdot P \cdot A\right)^{-1}$$
$$M = F^T \cdot Q \cdot A^T \cdot P$$
$$\alpha_j = Spalte_j(M)$$
$$\alpha_j^{\ T} = Spalte_j(M)^T$$
$$g_j = m_0 \cdot \sqrt{\alpha_j^{\ T} \cdot \alpha_j}$$
$$w_j = \frac{|g_j|}{\sum |g_j|} \cdot W$$
$$Q_{ff} = F^T \cdot Q \cdot F$$
$$Z = Sp(Q_{ff})$$

Der Quellcode in Matlab zur Netzoptimierung schaut folgendermaßen aus:

```
% Netzoptimierung
WZ=28;
% A-Matrix
A=[1 0 0; 1 0 0; -1 1 0; 0 1 0; 0 1 0; 0 -1 1; -1 0 1]

% Angaben
m0=2.25;
eps=0.43;

% Zielfunktion in Matrizenschreibweise
F=[1 0 0; 0 1 0; 0 0 sqrt(3)];

% Initialisierung der Wiederholungszahlen
for i=1:7
    w(i)=4;
end
for j=1:3
    for k=1:7
        P(k,k)=1/(m0^2/w(k)+eps^2);
    end
    Q=inv(A'*P*A);
    M=F'*Q*A'*P;
    for k=1:7
        alphat=M(:,k)';
        alpha=M(:,k);
        g(k)=sqrt(alphat*alpha)*m0;
    end
```

```
    for k=1:7
        w(k)=abs(g(k))/sum(abs(g))*WZ;
    end
    Qff=F'*Q*F;
    trace(Qff)
end
```

3. Ergebnisse

3.1 *Näherungshöhen*

Punkt	Näherungshöhe [m]
P_1	587,366
P_2	549,922
P_3	612,326

3.2 *A-Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3 *l-Matrix*

Die l-Matrix wurde nach folgendem Schema aufgestellt:

$$l_i = \Delta h_{jk} + \left(H_j - H_k\right)$$

$$l = \begin{bmatrix} 0,0025 \\ -0,0025 \\ -0,0008 \\ 0,0008 \\ 0,1016 \\ -0,0015 \\ 0,0015 \end{bmatrix} [m]$$

3.4 Erste Ausgleichung und Berechnung von s0

Das Ergebnis der ersten Ausgleichung war folgende v-Matrix:

$$v = \begin{bmatrix} 0,0127 \\ 0,0177 \\ 0,0215 \\ 0,0352 \\ -0,0656 \\ -0,0089 \\ 0,0089 \end{bmatrix} [m]$$

$$s_0 = 0,04075[m]$$

3.5 Chi² - Test

Der Chi²-Test musste auf einem Signifikanzniveau von 95% abgelehnt werden. Die Berechnung kann dem Protokoll entnommen werden.

3.6 Dänische Methode

Veränderung von s_0 über 7 Iterationen:

Iteration	**s_0 [m]**
1	0,04075
2	0,03533
3	0,02473
4	0,01611
5	0,00208
6	0,00200
7	0,00199

Gewichtsmatrix und Verbesserungen nach 7 Iterationen:

$$P = \begin{bmatrix} 0,918 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,896 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,985 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,999 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,990 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,990 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} -0{,}0024 \\ 0{,}0026 \\ 0{,}0013 \\ -0{,}0002 \\ -0{,}1010 \\ 0{,}0012 \\ -0{,}0012 \end{bmatrix} [m]$$

3.7 Erneuter Ausgleich

Die l-Matrix wurde an entsprechender Stelle um 10 [cm] verbessert und ein neuer Ausgleich gerechnet.

$$v = \begin{bmatrix} -0{,}0024 \\ 0{,}0026 \\ 0{,}0013 \\ -0{,}0002 \\ -0{,}0010 \\ 0{,}0012 \\ -0{,}0012 \end{bmatrix} [m]$$

3.8 Erneuter Chi² - Test

Der Chi²-Test wure auf einem Signifikanzniveau von 95% angenommen. Die Berechnung kann dem Protokoll entnommen werden.

3.9 Optimierung

1. Iteration:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}689 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}689 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}689 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}689 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}689 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}689 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}689 \end{bmatrix}$$

2. Iteration:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}646 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}646 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}338 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}646 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}646 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}926 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}926 \end{bmatrix}$$

3. Iteration:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}659 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}659 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}205 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}659 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}659 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}953 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}953 \end{bmatrix}$$

Nach 3 Iterationen wurde der folgende Wiederholungsvektor berechnet:

$$w = \begin{bmatrix} 3{,}85 & 3{,}85 & 0{,}71 & 3{,}85 & 3{,}85 & 5{,}94 & 5{,}94 \end{bmatrix}$$

Gerundet auf ganze Zahlen ergeben sich somit folgende Wiederholungszahlen:

Messung	**WZ**
1	4
2	4
3	1
4	4
5	4
6	6
7	5 (6)
Summe	**28**

Der Genauigkeitsgewinn kann aus den Spuren der Q_{ff}-Matrizen zweier aufeinanderfolgenden Iterationen ausgerechnet werden:

Iteration	sp(Qff)	Gewinn [%]
1	4,28	
2	3,90	8,87
3	3,84	1,46

4. Anhang

- Aufgabenstellung (2 Seiten)
- Numerische Angaben (1 Seite)
- Berechnungsprotokoll (5 Seiten)